Prednáška 6

6.1. Základné priestory funkcií

Potreby fyziky ale aj iných disciplín vyžadujú zavedenie doplnkových štruktúr do vektorových priestorov, obzvlášť vzhľadom na konvergencie postupností v nich (chceme hovoriť o prvkoch, ktoré sú blízko ostatných). Ide vlastne o zovšeobecnenie priestorov, v ktorých vieme merať vzdialenosť prvkov a ich veľkosť. Pojem normovaného priestoru je spojenie štruktúr metrického a vektorového priestoru. V samotnom metrickom priestore nie je definovaná žiadna operácia medzi prvkami a v lineárnom priestore zasa nemáme definovanú žiadnu metriku (vzdialenosť). Navyše, pojem bázy sa dá ťažko aplikovať na priestory, ktorých dimenzie nie sú konečné. Takýmito priestormi (funkcií) a ich geometriou sa zaoberá matematická disciplína nazývaná funkcionálna analýza.

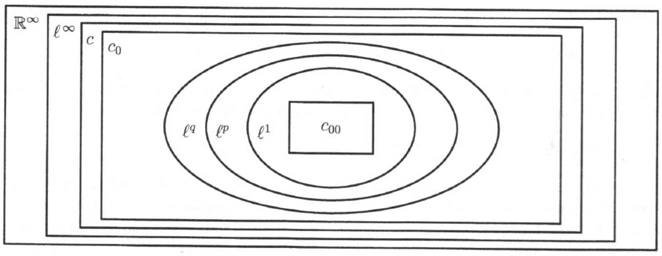
Zavedieme si základné (nekonečno-rozmerné) priestory používané v rôznych oblastiach matematických ale aj fyzikálnych vied. Prirodzeným rozšírením priestoru $\mathbb{R}^n$ je priestor $\mathbb{R}^\infty = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \dots$, ktorého prvkami sú vlastne postupnosti reálnych čísel. Začneme teda s vektorovými priestormi postupností, ozn. $\mathbf{x} := \{x_n\}_{n=1}^\infty \in X$, kde X je NLP.

Poznámka 6.1.1.

Na priestore $\mathbb{R}^\infty$ možno napríklad zaviesť metriky

$$\rho_1(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{|x_i - y_i|}{2^i(1 + |x_i - y_i|)},$$

$\rho_1(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sup_{i\in\mathbb{N}} \arctan(|x_i - y_i|)$. Tie však negenerujú normu, lebo nie sú homogénne.



Obr. 6.1: Inklúzie priestorov postupností.

Zavedieme si pojem nosič funkcie - ide o uzáver časti definičného oboru danej funkcie, na ktorom je nenulová.

Definícia 6.1.2.

Nech Ω je množina a $f : \Omega \to \mathbb{K}$, potom $\operatorname{supp} f := \overline{\{\mathbf{x} \in \Omega : f(\mathbf{x}) \neq 0\}}$.

Priestory postupností:

l^∞ označuje priestor ohraničených postupností s prirodzenou normou $\|\mathbf{x}\|_\infty = \sup_{i\in\mathbb{N}} |x_i|$

$$l^p := \left\{ \{x_n\}_{n=1}^\infty : \|\mathbf{x}\|_p = \left(\sum_{n=1}^\infty |x_n|^p \right)^{\frac{1}{p}} < \infty \right\}, p \in [1, \infty)$$

$$c := \left\{ \{x_n\}_{n=1}^\infty : \lim_{n\to\infty} |x_n| < \infty \right\} \subset l^\infty$$

$$c_0 := \left\{ \{x_n\}_{n=1}^\infty : \lim_{n\to\infty} x_n = 0 \right\} \subset l^\infty$$

$$c_{00} := \{\{x_n\}_{n=1}^\infty : \operatorname{supp}(\mathbf{x}) \text{ je konečný}\} \subset l^\infty$$

Problém 6.1.3.

Majme priestor $C([0,1])$ a $0 < m \leq k(x) \leq M$. Potom normy $\|f\|_2 := \sqrt{\int_0^1 f(t)^2\, \mathrm{d}t}$ a $\|f\|_{2,k} := \sqrt{\int_0^1 k(t)\, f(t)^2\, \mathrm{d}t}$ sú ekvivalentné.

Veta 6.1.4.

Nech $1 < p < q < \infty$. Potom

1. Normy $\|\cdot\|_p$ nie sú ekvivalentné a $\|\mathbf{x}\|_1 \geq \|\mathbf{x}\|_p \geq \|\mathbf{x}\|_q \geq \|\mathbf{x}\|_\infty$.
2. Platia inklúzie $c_{00} \subset l^1 \subset l^p \subset l^q \subset c_0 \subset c \subset l^\infty \subset \mathbb{R}^\infty$.
3. $\|\cdot\|_p$ je indukovaná skalárnym súčinom iba pre $p = 2$ a ním je $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \sum_{n=1}^\infty x_n y_n$.

Problém 6.1.5.

Rozmyslite si, prečo v predchádzajúcej platia ostré inklúzie.

Priestor merateľných funkcií:

Majme priestor s mierou (X, Σ, λ). Nech $\Omega \in \Sigma,\ \Omega \subset \mathbb{R}^n$.

$$\mathcal{L}^0(\Omega) = \mathcal{M}(\Omega) := \{f : \Omega \to \mathbb{K},\ f \text{ je merateľná}\}$$

$$B(\Omega) := \left\{f : \Omega \to \mathbb{K},\ f \in \mathcal{L}^0(\Omega) \text{ je ohraničená}\right\},\quad \|f\|_\infty = \sup_{x \in \Omega} |f(\mathbf{x})|$$

Veta 6.1.6.

Priestor $(B(\Omega), \|\cdot\|_\infty)$ je úplný, ale nie je separabilný.

Priestory spojitých funkcií sú veľmi dôležité aj z hľadiska aplikácií.

Priestory hladkých funkcií:

Nech Ω je množina v $\mathbb{R}^n$.

$$C(\Omega,\mathbb{K}) = C^0(\Omega,\mathbb{K}) := \{f : \Omega \to \mathbb{K},\ f \text{ je spojitá na } \Omega\}$$

$$C^n(\Omega,\mathbb{K}) := \left\{f : \Omega \to \mathbb{K},\ f^{(n)} \text{ je spojitá na } \Omega\right\},\ n \in \mathbb{N}$$

$$C^\infty(\Omega,\mathbb{K}) := \cap_{k\geq 0} C^k(\Omega,\mathbb{K})$$

$$C_c(\Omega,\mathbb{K}) := \{f \in C(\Omega,\mathbb{K}) : \operatorname{supp} f \text{ je kompakt}\}$$

$$C_0(\Omega,\mathbb{K}) := \left\{f \in C(\Omega,\mathbb{K}) : \lim_{\|\mathbf{x}\|\to\infty} f(\mathbf{x}) = 0\right\}$$

$$C_b(\Omega) := B(\Omega) \cap C(\Omega,\mathbb{K})$$

Poznámka 6.1.7.

Na priestoroch hladkých funkcií možno definovať funkcionály

$$\sup_{\mathbf{x}\in\Omega} \left|f^{(m)}(\mathbf{x})\right|,$$

ktoré sú však iba tzv. seminormy. Pre funkcie n-krát diferencovateľné sa zvyčajne používa norma

$$\|f\|_{n,\infty} = \sum_{i=0}^{n} \sup_{\mathbf{x}\in\Omega} |f^{(i)}(\mathbf{x})| = \sum_{i=0}^{n} \left\|f^{(i)}\right\|_\infty .$$

Alebo aj

$$\|f\|_{k,p} = \left(\sum_{i=0}^{k} \left\|f^{(i)}\right\|_p^p\right)^{\frac{1}{p}} = \left(\sum_{i=0}^{k} \int_\Omega \left|f^{(i)}(t)\right|^p \,\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{p}},$$

kde pre $p = 2$ ide o normu indukovanú skalárnym súčinom.

Veta 6.1.8.

Priestory $(C^k(\Omega), ||f||_{k,\infty})$ sú Banachove $\Leftrightarrow$ ak Ω je kompakt.
Neexistuje norma, tak aby $(C^\infty(\Omega), ||\cdot||)$ bol Banachov priestor.
Priestor $C_0(\Omega, \mathbb{K})$ je uzavretý podpriestor $C_b(\Omega)$ v $||\cdot||_\infty$ norme.
Ak Ω je kompakt, potom priestor $C(\Omega, \mathbb{K})$ je separabilný.

Poznámka 6.1.9.

Priestor $C_b(\Omega)$ je zrejme Banachov. Čo možno vyvodiť z poslednej časti vety o separabilite ostatných priestorov?

V predchádzajúcej vete netvrdíme, že neexistuje metrika ρ, v ktorej by bol priestor (C^∞, ρ) úplný.

Lebesgueove priestory:

$$\mathcal{L}^p(\Omega) := \left\{f \in \mathcal{L}^0(\Omega),\ ||f||_p < \infty\right\},$$

kde

$$||f||_p := \left(\int_\Omega |f(\mathbf{x})|^p \, \mathrm{d}\lambda(\mathbf{x})\right)^{\frac{1}{p}},\ 1 \leq p < \infty,$$

$$||f||_\infty = \operatorname{ess\,sup}_{\mathbf{x}\in\Omega} f(\mathbf{x}) := \inf\{C \geq 0 : |f(\mathbf{x})| \leq C \text{ pre s.v. } \mathbf{x}\} =$$

$$\inf\{a \in \mathbb{R} : \lambda(\{\mathbf{x} : f(\mathbf{x}) > a\}) = 0\}$$

Prirodzeným zovšeobecnením Lebesgueových priestorov sú priestory, kde pridáme váhy. Takéto priestory sa významne používajú v teórii harmonickej analýzy, kde sa stretávame s reprezentáciou funkcií alebo signálov pomocou superpozície základných vĺn. Ide o zovšeobecnenie pojmov Fourierovho radu a Fourierovej transformácie, o ktorých s budeme baviť neskôr.

Vážené Lebesgueove priestory:

Nech w je merateľná, s.v. kladná funkcia na Ω a $p \geq 1$. Potom definujeme $\|f\|_{p,w} \equiv \left(\int_\Omega w(\mathbf{x})|f(\mathbf{x})|^p \, \mathrm{d}\lambda(\mathbf{x})\right)^{\frac{1}{p}}$ normu na priestore $\mathcal{L}_w^p$, tj. na priestore všetkých funkcií s takto definovanou konečnou normou.

Problém 6.1.10.

Čo s definíciou priestoru $\mathcal{L}_w^p$ v prípade, že $p \in (0,1)$ (ktorá vlastnosť normy nebude splnená) ?ňň Pre ktoré p bude norma indukovaná skalárnym súčinom a aký bude mať predpis?

Veta 6.1.11.

(I) $\mathcal{L}_w^p(\Omega)$, $1 \leq p \leq \infty$ sú Banachove priestory.

(II) Pre $1 \leq p < \infty$ sú $\mathcal{L}_w^p(\Omega)$ separabilné.

(III) $\mathcal{L}_w^\infty(\Omega)$ separabilný nie je.

Pripomeňme si Hölderovu nerovnosť v tvare noriem, pričom tentokrát uvažujeme aj priestory s váhou w a pripúšťame aj $p = \infty$

Veta 6.1.12 (Hölderova nerovnosť)**.**

Nech $1 \leq p, q \leq \infty : 1/p + 1/q = 1$. Potom platí

$$\|fg\|_{1,w} \leq \|f\|_{p,w} \|g\|_{q,w} \,.$$

6.2. Stručný úvod do teórie operátorov

Operátory vo fyzike reprezentujú napríklad pozíciu, hybnosť, moment hybnosti alebo celkovou energiu systému.

Automaticky predpokladáme, že X, Y sú vektorové priestory nad rovnakým poľom. Operátor nazveme každé zobrazenie medzi dvoma normovanými priestormi (prípadne topologickými vektorovými priestormi), t.j. $T : X \to Y$. Samozrejme definičný obor operátora nemusí byť celé X, ale môže to byť aj podmnožina $D_T \subset X$. Ak $Y = \mathbb{K}$, potom T voláme funkcionál.

Pôsobenie operátora T na prvok (zväčša funkciu) $f \in X$ zapíšeme ako Tf (používa sa aj $T[f]$, či $T(f)$). Ak je výsledok funkcia z Y, potom to môžeme zdôrazniť takto $(Tf)(x)$.

Definícia 6.2.1.

Nech $(X, \|\cdot\|_1)$, $(Y, \|\cdot\|_2)$ sú normované priestory. Operátor $T : X \to Y$ je spojitý v $x_0 \in X$, akk $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall x \in X : \|x_0 - x\|_1 < \delta \implies \|T(x) - T(x_0)\|_2 < \varepsilon$.

Poznámka 6.2.2.

Povieme, že operátor je spojitý, akk je spojitý v každom bode v X. Zrejme je spojitý, akk zachováva konvergenciu. Spojitosť je veľmi závislá na normách (topológiách) daných priestorov. Ich zmenou sa spojitosť môže stratiť.

Najdôležitejšou triedou operátorov v matematike a fyzike sú tzv. lineárne operátory.

Definícia 6.2.3.

Nech $(X, \|\cdot\|_1)$, $(Y, \|\cdot\|_2)$ sú normované priestory (nad rovnakým poľom $\mathbb{K}$). Operátor $T : X \to Y$ je lineárny (antilineárny), akk $T(\alpha x + \beta y) = \alpha Tx + \beta Ty \quad (\bar{\alpha} Tx + \bar{\beta} Ty)$ $\forall x, y \in X, \ \ \alpha, \beta \in \mathbb{K}$.

Veta 6.2.4.

Nech X je konečnorozmerný NLP a Y je NLP. Potom lineárny operátor $T : X \to Y$ je spojitý.

Definícia 6.2.5.

Nech $(X, \|\cdot\|_1), (Y, \|\cdot\|_2)$ sú normované priestory (nad rovnakým poľom). Lineárny operátor $T : X \to Y$ je ohraničený, akk existuje $M \geq 0$ tak, že $\|Tx\|_2 \leq M\|x\|_1 \quad \forall x \in X$. Najmenšie také M nazveme operátorovou normou, teda $\|T\|_{op} = \inf\{c \geq 0 : \|Tx\| \leq c\|x\| \ \ \forall x \in X\}$.

Ak $X \neq \{0\}$ platí ekvivalentný tvar $\|T\|_{op} = \sup_{\|x\|=1} \|Tx\|$ a teda je to nejaká miera "veľkosti" operátorov.

Príklad 6.2.6.

Operátor $L : \ell^2 \to \ell^2$ definovaný ako $L(x_0, x_1, x_2, \dots) = (0, x_0, x_1, x_2, \dots)$ je zrejme ohraničený.

Poznámka 6.2.7.

Lineárny operátor medzi dvoma normovanými priestormi je ohraničený vtedy a len vtedy, ak je spojitý.
Platí, že na overenie spojitosti lineárneho operátora nám stačí overenie jeho spojitosti v bode 0.

Nie každý lineárny operátor je ohraničený !

Príklad 6.2.8.

Typický lineárny neohraničený (a teda aj nespojitý) operátor je $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} : C^1([0,1]) \to C([0,1])$, pričom berieme $\mathcal{L}^2$ normu (v oboch priestoroch). Zrejme

$$f_n : [0,1] \to [-1,1], \ \ f_n(x) = \sin(2\pi n x)$$

spĺňa $\|f_n\|_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}$, ale $\left\|\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f_n\right\|_2 = \sqrt{2}\pi n \to \infty$.

Príklad 6.2.9.

Na $X = C([0,1])$ (su supremovou normou) definujme operátor $T_\phi : X \to X$ ako

$$f \mapsto \int_0^1 \phi(x,t)\, f(t)\, \mathrm{d}t,$$

kde $0 \le \phi \in C([0,1]^2)$ a $0 \le \dfrac{\partial \phi}{\partial x} \in C([0,1]^2)$. Zrejme $(T_\phi f)(x) \in X$ a T je lineárne. Navyše $(T_\phi f)(x) \ge 0$ a pre $\|f\| \le 1$ máme $|f(t)| \le 1$ na $[0,1]$. Z toho $T_\phi(f+1) \ge 0$ a teda $-1 \le T_\phi f$. Podobne $T_\phi \le 1$. Takže pre $\|f\| \le 1$ máme $\left\|T_\phi\right\| \le \left\|T_\phi 1\right\|$. Platí však aj $\left\|T_\phi 1\right\| \le \left\|T_\phi\right\| \|1\| = \left\|T_\phi\right\|$, z čoho $\left\|T_\phi 1\right\| \le \left\|T_\phi\right\|$ a nakoniec spolu $\left\|T_\phi 1\right\| = \left\|T_\phi\right\|$. Teraz, zo spojitosti parciálnej derivácie pre $h(x) = \int_0^1 \phi(x,t)\,\mathrm{d}t$ vieme, že $h'(x) = \int_0^1 \dfrac{\partial \phi}{\partial x}(x,t)\,\mathrm{d}t$ existuje. Navyše (z nezápornosti parciálnej derivácie) $h'(x) \ge 0$ a teda $\|h\| = h(1) = \int_0^1 \phi(1,t)\,\mathrm{d}t$. Teda konečne $\left\|T_\phi\right\| = \int_0^1 \phi(1,t)\,\mathrm{d}t$.

Príklad 6.2.10.

Známa Fourierova transformácia $(\mathcal{F} f)(\xi) = \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-2\pi \mathrm{i} x \xi} f(x)\,\mathrm{d}x$ je lineárny operátor z $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ do $\mathcal{L}^\infty(\mathbb{R})$.

Pozrime sa teraz na operácie s operátormi.

Definícia 6.2.11.

Súčtom operátorov $T_i : X \to Y,\ i = 1,2$ je operátor $S = T_1 + T_2$, definovaný ako $Sf = (T_1 + T_2)f = T_1 f + T_2 f \ \ \forall f \in D_{T_1} \cap D_{T_2} \subseteq X$.
Súčin operátorov $T_i : X \to Y,\ i = 1,2$ je operátor $S = T_1 T_2$, definovaný ako $Sf = T_1(T_2 f)\ \ \forall f \in D_{T_2} \subseteq X : T_2 f \in D_{T_1}$.

Uvedomme si, že súčin operátorov je vlastne ich kompozícia. Pomocou toho môžno definovať aj mocninu operátora ako $T^n f = T(T^{n-1})f$.

Príklad 6.2.12.

Napríklad D'Alembertov operátor (v 1D) $D := \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ je súčtom operátorov $O_1 := \frac{\partial^2}{\partial t^2}$ a $O_2 := \frac{\partial^2}{\partial y^2}$, ale aj zložením (súčinom) operátorov prvého rádu $D_1 := \frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial y}$ a $D_2 := \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial y}$, teda $D := D_1 D_2$.

Poznámka 6.2.13.

V princípe nie je teda problém definovať akúkoľvek slušnú operátorovú funkciu, napr.

$$\mathrm{e}^T = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} T^k.$$

Asi nás neprekvapí, že vo všeobecnosti neplatí komutatívnosť násobenia (skladania) operátorov. Teda násobenie môže závisieť na poradí operátorov (viď násobenie matíc).

Definícia 6.2.14.

Aby sme mohli vyšetrovať komutatívnosť, zavádza sa nový operátor – komutátor $[T, S] \equiv TS - ST$.

Problém 6.2.15.

Určte, kedy komutujú operátory $\frac{\partial}{\partial x}$ a $\frac{\partial}{\partial y}$?
Je operátor z príkladu 6.2.12 rozložený na operátory, ktoré komutujú?

Rieszova veta z funkcionálnej analýzy zabezpečuje existenciu dôležitých lineárnych operátorov. Samozdružené operátory reprezentujú veľa operátorov v matematickej fyzike (napr. hamiltoniány v kvantovej mechanike). Dokázať samoadjungovanosť (najmä neohraničeného) zobrazenia však nie je vždy úplne jednoduché. Zvedieme si najprv $D_{T^*} = \{y \in H : \quad x \to \langle Tx, y \rangle, \ x \in D_T$ je spojitý funkcionál$\}$.

Definícia 6.2.16.

Majme Hilbertov priestor $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ a lineárny operátor $T : H \to H$ taký, že $\overline{D_T} = H$. Potom združený (adjungovaný) operátor T^* nazveme taký operátor, ktorý spĺňa

$$\langle Tx, y\rangle = \langle x, T^*y\rangle \quad \forall x \in D_T, y \in D_{T^*}.$$

Operátor T nazývame normálny, ak $TT^* = T^*T$ (teda ak T komutuje so svojím združeným operátorom). Operátor T nazývame symetrický, ak

$$\langle Tx, y\rangle = \langle x, Ty\rangle \quad \forall x, y \in D_T.$$

Operátor T nazývame samozdružený (samoadjungovaný, Hermitovský), ak $T = T^*$. Operátor T nazývame unitárny, ak $TT^* = \mathrm{Id}$.

Poznámka 6.2.17.

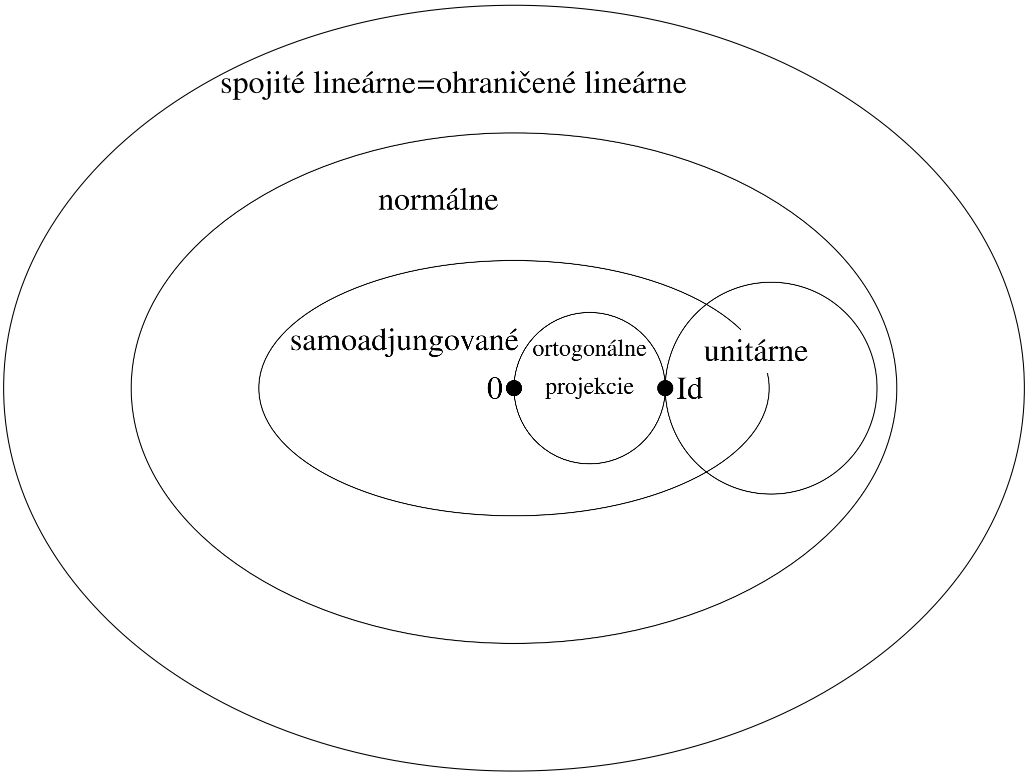
Nájdenie explicitného popisu množiny D_{T^*} je vo všeobecnosti veľmi ťažká úloha.

Príklad 6.2.18.

Príklad unitárneho (a teda aj normálneho) zobrazenia je Fourierova transformácia na $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$.

Problém 6.2.19.

Nájdite normálne zobrazenie, ktoré nie je unitárne.



Obr. 6.2: Operátory z H do H.

Príklad 6.2.20.

Nech x označuje súradnicu častice pohybujúcej v jednom rozmere. Uvažujme operátor hybnosti v kvantovej mechanike $\hat{p} = -\mathrm{i}\hbar\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$, pričom $x \in [a,b]$. Počítajme

$$\langle \hat{p}f, g\rangle = \hbar \int_a^b \overline{(-\mathrm{i}f'(x))}g(x)\,\mathrm{d}x = \mathrm{i}\hbar\left[\overline{f(x)}g(x)\right]_a^b - \int_a^b \overline{f(x)}\mathrm{i}g'(x)\,\mathrm{d}x = C + \langle f, \hat{p}g\rangle.$$

To znamená, že ak $D_{\hat{p}} = \{f \in \mathcal{L}^2(a,b) : f' \in \mathcal{L}^2(a,b),\ f(a) = f(b) = 0\}$, potom operátor $\hat{p}$ je samoadjungovaný.

Problém 6.2.21.

Ukážte, že na $H = \mathcal{L}^2(0,1)$ adjungovaný operátor k operátoru $(Ax)(t) = \int_0^t x(s)\,\mathrm{d}s$ je daný predpisom $(A^*x)(t) = \int_t^1 \overline{x(s)}\,\mathrm{d}s$.

Ak je $T : H \to H$ samoadjungovaný, potom platí (Hermiteovská) symetria $\langle x, Ty\rangle = \overline{\langle y, Tx\rangle}$ a teda $\langle Tx, x\rangle$ je reálne číslo.

6.3. Úvod do variačného počtu

Predmetom variačného kalkulu je hľadanie najväčších a najmenších hodnôt všeobecnejších zobrazení, ako sú funkcie jednej, či viacerých premenných - tzv. funkcionálov, ktorých nezávislými premennými sú funkcie, definované na nejakej množine. Funkcionál môžeme chápať ako zobrazenie priraďujúce funkciám čísla (skaláry). Jednoduchým príkladom funkcionálu je zobrazenie priraďujúce (testovacej) funkcii jej funkčnú hodnotu v počiatku - Diracova delta distribúcia (zovšeobecnená funkcia) : $\delta(f) = f(0)$. Príkladom nelineárneho funkcionálu je dĺžka krivky (graf hladkej funkcie f): $l(f) = \int_a^b \sqrt{1 + (f')^2(x)}\,\mathrm{d}x$.

Motivácia - účinok : princíp najmenšej akcie:

Akcia (účinok) je merateľná veličina, ktorá popisuje časový vývoj fyzikálneho systému. Je integrálnou alternatívou k diferenciálnemu tvaru fyzikálnych zákonov. Je to funkcionál

$$\mathcal{S}[\mathbf{q}(t)] = \int_{t_1}^{t_2} L[\mathbf{q}(t), \dot{\mathbf{q}}(t), t]\,\mathrm{d}t,$$

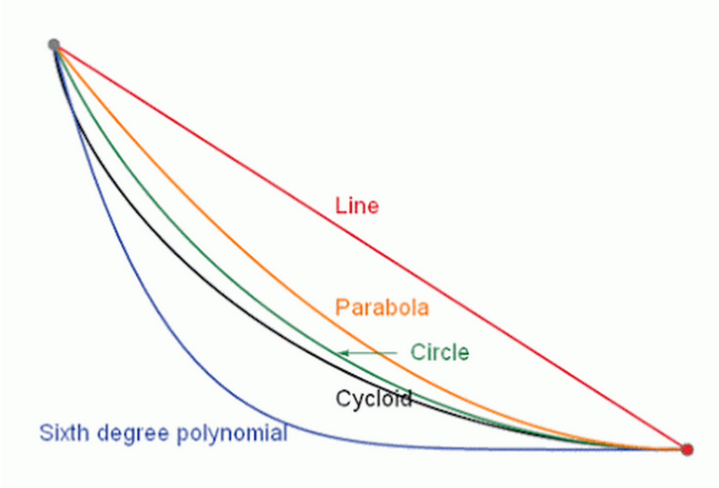
teda integrál Lagrangeovej funkcie medzi časmi t_1 a t_2 (počiatočný a konečný stav systému), pričom kde $\mathbf{q}$ sú zovšeobecnené súradnice.

Motivácia - Brachistochrona (z gréckeho *brachistos* najkratší, *chronos* čas):

Úlohou je nájsť tvar spojnice dvoch bodov $A[0, y_A]$ a $B[x_B, 0]$, po ktorej by sa ”teleso” pohybujúce sa iba vplyvom gravitačnej sily, dostalo z A do B v najkratšom čase. Predpokladá sa pohyb v homogénnom tiažovom poli a odporové sily sa zanedbávajú. Ak by obe body ležali "pod sebou"(na rovnakej vertikále), tak je zrejme úloha triviálna, hľadanou krivkou je úsečka.
Matematicky chceme vlastne minimalizovať funkcionál

$$T = \int_0^{x_B} \sqrt{\frac{1 + y'(x)^2}{2g(y_A - y(x))}}\mathrm{d}x,$$

kde T vyjadruje celkovú dobu pohybu. Vidíme, že Lagrangeova funkcia (integrand) nezávisí explicitne na x.



Obr. 6.3: Riešenie úlohy o brachistochrone - cykloida.

Definícia 6.3.1.

Nech X je NLP, funkcionál na X je zobrazenie $\Phi : X \to \mathbb{K}$.

My budeme vyšetrovať hlavne funkcionály typu

$$\Phi(y) = \int_a^b f(x, y(x), y'(x))\,\mathrm{d}x, \tag{6.1}$$

kde $f \in C^{0,2}(\Omega)$, $\Omega = [a, b] \times \mathbb{R}^2$ a riešenie $y \in C^1([a, b])$.

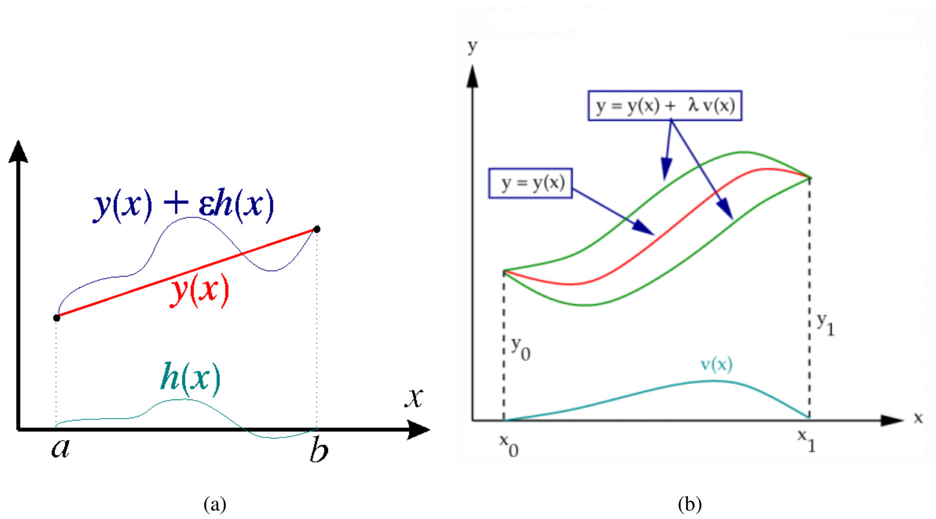
Príklad 6.3.2 (Najkratšia spojnica dvoch bodov)**.**

Nech $\mathcal{M} := \{y \in C^1([a, b]), y(a) = A, y(b) = B\}$. Hľadáme také $y_0 \in \mathcal{M}$, aby funkcionál

$$\Phi(y) = \int_a^b \sqrt{1 + y'^2(x)}\,\mathrm{d}x$$

nadobúdal v y_0 svoje minimum na $\mathcal{M}$.

Čo vlastne znamená, že funkcionál Φ z predchádzajúceho príkladu, nadobúda v y_0 svoje minimum na $\mathcal{M}$? Keďže hodnoty funkcionálov vieme porovnávať, definícia minima je analogická ako v prípade funkcií, tj. $\Phi(y_0) \leq \Phi(y_0 + h)$ pre $y_0 + h \in \mathcal{M}$. Odkiaľ musí byť h ? Keďže



Obr. 6.4: Diferencie argumentu funkcionálu (6.1).

musí platiť, že $z = y_0 + h \in \mathcal{M}$, máme podmienky $A = z(a) = A + h(a)$, $B = z(b) = B + h(b)$. Teda

$$h \in C_0^1([a,b]) := \{h \in C^1([a,b]), h(a) = 0, h(b) = 0\}.$$

Pre každé také h zaveďme funkciu

$$\phi_h(t) = \Phi(y_0 + th),\ \ t \in \mathbb{R}.$$

Zrejme $th \in C_0^1([a,b])$, a teda $\phi(0) = \Phi(y_0) \leq \Phi(y_0 + th) = \phi_h(t)$, $t \in \mathbb{R}$, tj. $\phi_h(t)$ má v nule lokálne minimim (dokonca globálne). To nás privádza k nasledujúcej definícii.

Definícia 6.3.3.

Nech X, Y sú (reálne) NLP, $\Phi : X \to Y$ a $y_0 \in U \subseteq X$ (U je otvorená), $h \in X$. Ak existuje

$$\lim_{t\to 0} \frac{\Phi(y_0+th)-\Phi(y_0)}{t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Phi(y_0+th)\Big|_{t=0} = \varphi_h'(0),$$

potom ju nazývame derivácia zobrazenia (operátora) Φ v bode y_0 v smere h, označujeme ju $\partial_h\Phi(y_0)$.

Limita sa chápe v zmysle normy na Y a ak $Y = \mathbb{R}$ tak hovoríme o derivácii funkcionálu.

Teda máme zobrazenie $h \mapsto \partial_h\Phi(y_0)$, ktoré nazveme variáciou zobrazenia Φ v bode y_0, označujeme ju symbolom $\delta\Phi(y_0; h)$. Teda $\delta\Phi(y;\cdot) : X \to Y$, ktoré je homogénne, teda $\forall\alpha \in \mathbb{R}\ \ \delta\Phi(y;\alpha h) = \alpha\delta\Phi(y;h)$, ale nemusí byť aditívne.

Ak je $\delta\Phi(y_0; h)$ lineárna a ohraničená, nazýva sa Gâteauxov diferenciál (slabá derivácia).

Ak pre dané $h \in X$ existuje variácia $\delta\Phi(y; h)$ v bode y_0 a v smere k, potom ju nazveme druhou variáciou a označíme ju $\delta^2\Phi(y_0; h, k)$.

Definícia 6.3.4.

Nech X a Y sú NLP, $y_0 \in U \subseteq X$ (U je otvorená), $h \in X$ a $F : X \to Y$. Hovoríme, že zobrazenie (operátor) F je Fréchetovsky diferencovateľné[a] v bode $y_0 \in U$, ak ak existuje lineárny ohraničený operátor $DF(y_0)$ taký, že

$$\lim_{\|h\|_X\to 0} \frac{F(y_0+h)-F(y_0)-DF(y_0)h}{\|h\|_X} = 0.$$

[a] Ekvivalentne

$$\lim_{\|h\|_X\to 0} \frac{\|F(y_0+h)-F(y_0)-DF(y_0)h\|_Y}{\|h\|_X} = 0.$$

V našom prípade máme $Y = \mathbb{R}$, teda hovoríme o F-diferencovateľnosti funkcionálov.

Veta 6.3.5.

Nech X, Y sú NLP a $\Phi : X \to Y$, potom

- ak existuje Fréchetov diferenciál, potom je rovný Gâteauxovmu;
- ak Φ je G-diferencovateľné a $\delta\Phi$ je spojitý v okolí bodu x_0, potom je Φ v bode x_0 F-diferencovateľný.

Príklad 6.3.6.

- $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$ má v bode $(0,0)$ deriváciu v každom smere, ale nemá tam G a ani F-deriváciu.
- Nech $X = C[0,1]$ a $F : f \to \int_0^2 f^2(x)\,\mathrm{d}x$. Zrejme existuje derivácia v smere: $\partial_h F(f) = 2\int_0^1 f(x)h(x)\,\mathrm{d}x$ a je lineárna. Navyše $|\partial_h F(f)| = 2\int_0^1 |f(x)h(x)|\,\mathrm{d}x \leq 2\|h\|_\infty \int_0^1 |f(x)|\,\mathrm{d}x$ implikuje spojitosť a teda Gâteauxovskosť. Dokonca

$$0 \leq \lim_{h\to 0} \frac{F(f+h) - F(f) - \partial_h F(f)}{\|h\|_\infty} = \lim_{h\to 0} \frac{\int_0^1 h(x)^2\,\mathrm{d}x}{\|h\|_\infty} \leq \lim_{h\to 0} \|h\|_\infty^2 = 0.$$

Takže existuje aj silná derivácia a rovná sa $\partial_h F(f)$.

Poznámka 6.3.7.

Podľa vety o derivácii parametrického integrálu a zloženej funkcii dostaneme vyjadrenie derivácie ϕ_h:

$$\phi_h'(t) =$$

$$= \int_a^b \frac{\partial f}{\partial y}(x, y_0(x)+t\,h(x), y_0'(x)+t\,h'(x))h(x)+\frac{\partial f}{\partial z}(x, y_0(x)+t\,h(x), y_0'(x)+t\,h'(x))h'(x)\,\mathrm{d}x,$$

čo pre $t = 0$ dáva

$$\phi_h'(0) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial y}(x, y_0(x), y_0'(x))h(x) + \frac{\partial f}{\partial z}(x, y_0(x), y_0'(x))h'(x)\,\mathrm{d}x,$$

a to musí byť rovné nule pre $h \in C_0^1([a,b])$.

Poznámka 6.3.8.

Vo fyzike sa, namiesto testovacej funkcie, často definuje variácia pomocou Diracovej delta funkcie:

$$\frac{\delta\Phi[y_0(x)]}{\delta y_0(z)} = \lim_{t\to 0} \frac{\Phi[y_0(x) + t\,\delta(x-z)] - \Phi[y_0(x)]}{t}.$$

Tá je však distribúciou a nie funkciou. Rigrózne zavedenie tejto definície si vyžaduje hlbšie znalosti z teórie distribúcií. Navyše táto definícia má iný charakter, keďže táto perturbácia hovorí o variácii y_0 v bode z a nie v ostatných bodoch intervalu (množiny).

Podobne vieme definovať Gateauxové diferenciály a variácie vyšších rádov.

Veta 6.3.9.

Ak je funkcionál Φ 2-krát G-diferencovateľný na X a $\delta^2\Phi(x; h, h) \geq 0\ \forall x, h \in X$, potom je konvexný.

Pozor ani pre druhú mocninu normy nemusí G-derivácia existovať.

Príklad 6.3.10.

V $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_1)$ je $\|x\|_1 = \|(x_1,x_2)\|_1 = |x_1| + |x_2|$. Teda $\|(x_1,x_2)\|_1^2 = x_1^2 + 2|x_1||x_2| + x_2^2$ nemá deriváciu pre $x_2 = 0$ a tak, o.i., $\|\cdot\|_1^2$ nemá parciálnu deriváciu v bodoch $(x_1, 0)$.

Problém 6.3.11.

Ukážte, že každá norma nie je G-diferencovateľná v bode 0 a kvadrát každej normy už áno.

Definícia 6.3.12.

Ak je Φ funkcionál na X, $M \subset X$, potom bod $y_0 \in M$ nazveme bodom

- (ostrého) lokálneho maxima funkcionálu Φ vzhľadom k M, ak existuje $O(y_0)$: $y \in O(y_0) \cap M \Rightarrow \Phi(y) \leq \Phi(y_0)$ $(\Phi(y) < \Phi(y_0), y \neq y_0)$
- (ostrého) lokálneho minima funkcionálu Φ vzhľadom k M, ak existuje $O(y_0)$: $y \in O(y_0) \cap M \Rightarrow \Phi(y) \geq \Phi(y_0)$ $(\Phi(y) > \Phi(y_0), y \neq y_0)$
- kritickým (stacionárnym) funkcionálu Φ, ak pre všetky $h \in X$ je $\delta\Phi(y_0; h) = 0$

Ukazuje sa, že v niektorých prípadoch je možné použiť rovnaké úvahy ako pre úlohy funkcií reálnych premenných. Tak ako v prípade hľadania extrémov funkcií, uvedieme si najprv nutnú podmienku existencie lokálneho extrému pre "hladké" funkcionály, ktorú sme vlastne dokázali.

Veta 6.3.13 (Eulerova nutná podmienka)**.**

Ak existuje variácia $\delta\Phi(y_0; h)$ v smere $h \in X$ a Φ má v y_0 lokálny extrém, potom $\delta\Phi(y_0; h)$=0.

Ak existuje variácia $\delta\Phi(y_0; h)$ v každom smere, potom y_0 je kritickým bodom Φ.

Otázka je, prečo požadujeme nulovosť "derivácie" v každom smere ? V nekonečnorozmerných priestoroch nám síce axióma výberu zaručuje existenciu bázy, ale tá nemusí byť ani spočítateľná.

Poznámka 6.3.14.

Poznamenajme, že vo fyzike sú často potrebné nielen extremálne body, ale aj stacionárne body, ktoré nimi nie sú (napríklad vo variačných princípoch mechaniky).

Veta 6.3.15 (Lagrangeova nutná podmienka)**.**

Ak existuje druhá variácia $\delta^2\Phi(y_0; h, h)$ v smere $h \in X$ a Φ má v y_0 lokálne minimum, potom $\delta^2\Phi(y_0; h, h) \geq 0$.

S postačujúcimi podmienkami lokálnych extrémalov je to trochu zložitejšie ako v prípade funkcií. Nasledujúca podmienka je dosť silná a teda použijeme ju len v malom počte prípadov.

Veta 6.3.16 (Lagrangeova postačujúca podmienka)**.**

Nech je y_0 kritickým bodom Φ a nech existuje jeho okolie, na ktorom je druhá variácia spojitá. Ak existuje $\alpha > 0$: pre všetky $y \in O(y_0)$ a všetky $h \in X$ je

$$\delta^2\Phi(y; h, h) \geq \alpha ||h||^2.$$

Potom má Φ v y_0 striktné lokálne minimum.

Nutná Eulerova podmienka je pre funkcionál (6.1) ekvivalentná tomu, že kritický bod rieši istú diferenciálnu rovnicu, ktorú nazývame Eulerova-Lagrangeova rovnica funkcionálu (6.1).

Uvedieme si lemu, ktorá býva označovaná aj ako fundamentálna lemma variačného počtu.

Lema 6.3.17 (Du Bois-Reymond)**.**

Nech $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $f \in L^1_{loc}(\Omega)$ a $\forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ $\int_\Omega f\varphi \, d\lambda = 0$. Potom $f = 0$ s.v.

Dôsledok 6.3.18.

Nech $\alpha, \beta \in C([a,b])$. Potom

- platnosť
$$\int_a^b \alpha(x)\, h'(x)\, \mathrm{d}x = 0$$
pre každú $h \in C_0^1([a,b])$ je ekvivalentná tomu, že $\alpha \equiv c$ na $[a,b]$, kde c je konštanta;
- platnosť
$$\int_a^b [\alpha(x)\, h(x) + \beta(x)\, h'(x)]\, \mathrm{d}x = 0$$
pre každú $h \in C_0^1([a,b])$ je ekvivalentná tomu, že $\beta \in C^1([a,b])$ a $\beta' = \alpha$.

Z Du Bois-Reymondovej lemy ihneď vyplýva nasledujúce dôležité tvrdenie.

Veta 6.3.19 (Eulerova-Lagrangeova)**.**

Ak má funkcionál (6.1) lokálny extrém v bode $y_0 \in \mathcal{M}$, potom na intervale $[a,b]$ platí
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y_0(x), y_0'(x)) - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left\{\frac{\partial f}{\partial z}(x, y_0(x), y_0'(x))\right\} = 0.$$

Skrátene píšeme
$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left\{\frac{\partial f}{\partial z}\right\} = 0}$$

alebo aj $\dfrac{\partial f}{\partial y} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left\{\dfrac{\partial f}{\partial y'}\right\}$.

- Ak $f = f(x,y)$ teda $\dfrac{\partial f}{\partial z} = 0$, potom má EL rovnica tvar $\dfrac{\partial f}{\partial y} = 0$ a teda riešenie neobsahuje voliteľné konštanty. Vo všeobecnosti neexistuje riešenie úlohy s okrajovými podmienkami.
- Ak $f = f(x,z)$ teda $\dfrac{\partial f}{\partial y} = 0$, potom je EL rovnica $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left\{\dfrac{\partial f}{\partial z}\right\} = 0$, a teda $\dfrac{\partial f}{\partial z} = c,\ c \in \mathbb{R}$, čo je ODR prvého rádu.

- Ak $f = f(y,z)$ teda $\dfrac{\partial f}{\partial x} = 0$, potom sa EL rovnica redukuje na Beltramiho identitu

$$\boxed{f - y'\frac{\partial f}{\partial z} = c,}$$

$c \in \mathbb{R}$, lebo $0 = \dfrac{\partial f}{\partial y} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left\{\dfrac{\partial f}{\partial z}\right\} = \dfrac{\partial f}{\partial y} - \dfrac{\partial^2 f}{\partial z^2}y'' - \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}y' = \frac{1}{y'}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left\{f - y'\frac{\partial f}{\partial z}\right\}$.

Problém 6.3.20.

Analyzujte situáciu, keď $f = f(z)$ a $f = M(x,y) + N(x,y)z$.

Príklad 6.3.21.

Fermatov princíp : svetlo sa v priestore šíri z jedného bodu do druhého po takej dráhe ($y = f(x)$), aby čas nadobúdal extremálnu hodnotu (extrémom je vo väčšine prípadov minimum). Máme teda

$$A[f] = \int_{x_0}^{x_1} n(x, f(x))\sqrt{1 + f'(x)^2}\,\mathrm{d}x,$$

kde index lomu $n(x,y)$ závisí od materiálu (polohy). Napr. Snellov zákon

$$n(x,y) = \begin{cases} n_{(-)}, & x < 0, \\ n_{(+)}, & x > 0. \end{cases}$$

Z toho má Eulerova–Lagrangeova rovnica tvar

$$-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\frac{n(x,f(x))f(x)'}{\sqrt{1 + f(x)'^2}}\right] + \frac{\partial n(x,f(x))}{\partial y}\sqrt{1 + f'(x)^2} = 0.$$

Poznamenajme, že splnenie Eulerovej-Lagrangeovej rovnice je nutnou a postačujúcou podmienkou na to, aby variácia funkcionálu (6.1) bola nulová pre $h \in C_0^1([a,b])$. Uvedieme si ešte nutnú podmienku špeciálne pre funkcionál (6.1).

Veta 6.3.22 (Legendreova nutná podmienka)**.**

Ak má funkcionál (6.1) lokálne minimum v bode $y_0 \in \mathcal{M}$, potom na intervale $[a, b]$ platí

$$\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(x, y_0(x), y_0'(x)) \geq 0.$$

V prípade funkcionálu (6.1), vieme použiť analogická úvahu ako v prípade funkcií. Pamätáme sa, že pre funkcie stačilo aby kvadratická forma druhého diferenciálu bola pozitívne (negatívne) definitná v stacionárnom bode a ten bol potom bodom ostrého lokálneho minima (maxima).

Poznámka 6.3.23.

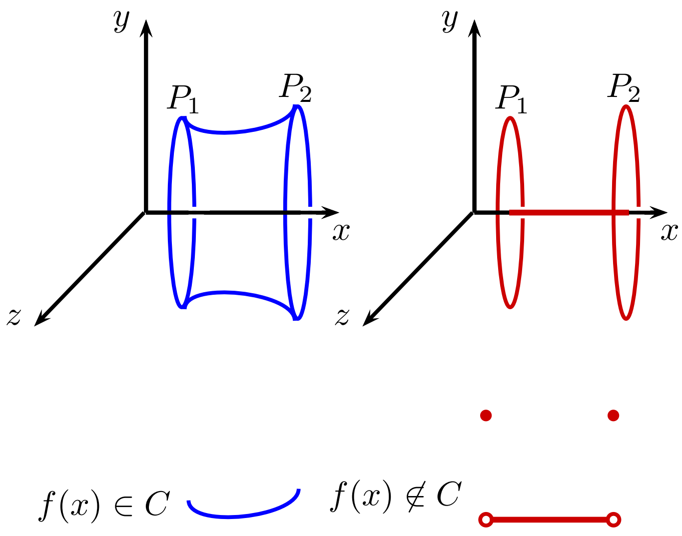
Ak uvažujeme problém s jedným ($h \in C^1([a, b]), h(a) = 0$) alebo oboma voľnými koncami (iba $h \in C^1([a, b])$), potom sa nám zrejme mení množina $\mathcal{M}$. Tým pádom sa nám pridávajú podmienky, ktoré musí riešenie spĺňať. V prvom prípade musí byť splnené

$$\frac{\partial f}{\partial z}(b, y_0(b), y_0'(b)) = 0$$

a v druhom ešte naviac aj

$$\frac{\partial f}{\partial z}(a, y_0(a), y_0'(a)) = 0.$$

Nasledujúci príklad poukazuje na fakt, že nie je jedno v akom priestore funkcií minimalizujeme daný funkcionál.



Obr. 6.5: Spojité (katenoid) vs. nespojité riešenie problému minimálnj plochy.

Poznámka 6.3.24 (Dôležitosť priestoru, kde pracujeme)**.**

Lavrentievov jav.
Uvažujme funkcionál

$$I(y) = \int_0^1 (y^3 - x^2)^2 (y')^2 \, dx,$$

ktorý chceme minimalizovať, pričom sú splnené podmienky $y(0) = 0,\ y(1) = 1$. Dá sa ukázať, že po častiach diferencovateľná krivka je lepšie riešenie ako ľubovoľná hladká krivka. Navyše zvyšovanie počtu bodov, ktoré "kazia" hladkosť, znižuje hodnotu funkcionálu.

Goldschmidtove riešenie.
Minimamalizácia povrchu rotačnej plochy vytvorenej krivkou spájajúcou body $P_1 = [x_1, y_1]$, $P_2 = [x_2, y_2]$ v rovine xy (rotácia okolo osi Ox):

$$2\pi \int_{x_1}^{x_2} f(x) \sqrt{1 + f'(x)^2} dx.$$

Ak P_1, P_2 nie sú veľmi ďaleko (pomeru k $x_2 - x_1$), tak riešením je katenoid, v opačnom prípade môže byť riešením útvar vytvorený rotáciou nespojitej krivky.

V prípade funkcionálov je možné zovšeobecniť (dokonca aj pre Banachove priestory) metódu Lagrangeovych multiplikátorov pre riešenie extremálnych úloh s väzbou. Označme množinu $\tilde{\mathcal{M}} := \left\{ y \in \mathcal{M} : \int_a^b g(x, y(x), y_0'(x))\,\mathrm{d}x = L \right\}$, kde $A, B, L \in \mathbb{R}$, $g(x, y, z) \in C^1(\Omega)$ sú dané.

Veta 6.3.25 (Ljusternikova (Lagrangeove multiplikátory))**.**

Nech $a \in X$, $\Phi, g_1, \dots, g_n : X \to \mathbb{R}$ sú v okolí bodu a spojité, existujú $\Phi'(a)$, $\boldsymbol{g}'(a)$, $g_1'(a), \dots, g_n'(a)$ sú LN[a] a f má v bode a lokálny extrém vzľadom k množine väzieb

$$M := \{x \in X : g_j(x) = g_j(a),\ j = 1, \dots, n\}.$$

Potom $\exists \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R} :\ \Phi'(a) = \sum_{j=1}^n \lambda_j\, g_j'(a)$.

[a] Teda $\boldsymbol{g}'$ je surjektívne a tak a je regulárny bod zobrazenia $\boldsymbol{g}$.

Poznámka 6.3.26.

Pre nekonečne veľa väzieb ($\boldsymbol{g} : X \to Y$, Y je Banachov priestor) stále platí, ak a je regulárny bod variety $\boldsymbol{g} = \boldsymbol{0}$, pričom $(\Phi - F \circ \boldsymbol{g})'(a) = 0$ pre nejaké $F \in Y^*$.

6.3.27. Všeobecnejšie úlohy variačného počtu

- Uvažujme funkcionál

$$\Phi(y) = \int_a^b f(x, y, y', \dots, y^{(k)})\,\mathrm{d}x.$$

Analogicky dostaneme tzv. **Eulerovu-Poissonovu** rovnicu rádu $2k$:

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right) + \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\left(\frac{\partial f}{\partial y''}\right) - \dots + (-1)^k \frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}x^k}\left(\frac{\partial f}{\partial y^{(k)}}\right) = 0}$$

Príklad 6.3.28 (Prehnutá os pružného valcového nosníka upevneného na koncoch)**.**

V tomto prípade je potrebné minimalizovať $\int_{-l}^{l} \rho\, y - \frac{\mu\,(y'')^2}{2}\,\mathrm{d}\lambda$, pričom $y(\pm l) = 0$ a $y'(\pm l) = 0$. Premenná μ označuje tuhosť v ohybe ($\mu = EI$, E je Youngov modul, teda pružnosti v ťahu a I je kvadratický modul prierezu, teda druhý moment) a ρ zasa spojité externé priečne zaťaženie nosníka.
EL rovnica sa nayýva Eulerova-Bernoulliho DR: $\rho = \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\{\mu\, y''\}$

- Uvažujme funkcionál

$$\Phi(\boldsymbol{y}) = \int_a^b f(x, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{y}')\,\mathrm{d}x,$$

pre $\boldsymbol{y} \in [C^1([a,b])]^n$. Analogicky vytvorme pre $\boldsymbol{h} \in [C^1([a,b])]^n$ funkciu

$$\varphi_h(t) = \Phi(\boldsymbol{y}^0 + t\boldsymbol{h})$$

a jej deriváciu v nule

$$\varphi_h'(0) = \int_a^b \langle \nabla_{\boldsymbol{y}} f(x, \boldsymbol{y}^0(x), (\boldsymbol{y}^0)'(x)), \boldsymbol{h}(x)\rangle + \langle \nabla_{\boldsymbol{z}} f(x, \boldsymbol{y}^0(x), (\boldsymbol{y}^0)'(x)), \boldsymbol{h}'(x)\rangle\,\mathrm{d}x$$

je variácia $\delta\Phi(\boldsymbol{y}^0; \boldsymbol{h})$.

Podobne ako v skalárnom prípade pre bude nutnou podmienkou lokálneho extrému sústava EL rovníc - **Euler-Weierstrass**:

$$\boxed{\nabla_{\boldsymbol{y}} f - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\nabla_{\boldsymbol{z}} f) = \boldsymbol{0}}$$

Teraz je však možné uvažovať viacero úloh, keďže je väčšia variabilita voľby okrajových podmienok. Ak volíme prírastky h tak, že $h_j \in C_0^1([a,b])$ a ostatné komponenty berieme identicky nulové, dostaneme

$$\frac{\partial f}{\partial y_i}(x, \boldsymbol{y}^0(x), (\boldsymbol{y}^0)'(x)) - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left\{\frac{\partial f}{\partial z_i}(x, \boldsymbol{y}^0(x), (\boldsymbol{y}^0)'(x))\right\} = 0, \quad i = 1, \ldots, n.$$

K týmto rovniciam potom eventuálne dostaneme príslušné podmienky v krajných bodoch intervalu $[a,b]$:

$$\frac{\partial f}{\partial z_i}(a, \boldsymbol{y}^0(a), (\boldsymbol{y}^0)'(a)) = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial z_j}(b, \boldsymbol{y}^0(b), (\boldsymbol{y}^0)'(b)) = 0$$

pre nejaké i, j.

Problém 6.3.29.

Nájdite EL rovnice pre funkcionál $\frac{1}{2}\int_0^1 \langle \boldsymbol{x}(t), J\dot{\boldsymbol{x}}(t)\rangle \, \mathrm{d}t$ pre $J = \begin{pmatrix} 0 & -I_n \\ I_n & 0 \end{pmatrix}$.

- Uvažujme teraz funkcionál

$$\Phi(u) = \int_\Omega f(\boldsymbol{x}, y, \nabla y) \, \mathrm{d}\boldsymbol{x} \tag{6.2}$$

pre $y \in C^1(\overline{\Omega})$, kde Ω je ohraničená oblasť v $\mathbb{R}^n$. Majme na hranici $\delta\Omega$ dané hodnoty funkcie y. Ideme hľadať minimum funkcionálu Φ na

$$M = \{y \in C^1(\overline{\Omega}) : y = g \text{ na } \delta\Omega\}.$$

Analogicky pre $h \in C_0^1(\overline{\Omega})$ je $\varphi_h(t) = \Phi(y_0 + th)$ a jej derivácia v nule

$$\varphi_h'(0) = \int_\Omega \left[f_y(\boldsymbol{x}, y_0(\boldsymbol{x}, \nabla y_0(\boldsymbol{x})))\, h(\boldsymbol{x}) + \sum_{i=1}^n f_{z_i}(\boldsymbol{x}, y_0(\boldsymbol{x}, \nabla y_0(\boldsymbol{x})))\, h_{z_i}(\boldsymbol{x}) \right] \mathrm{d}\boldsymbol{x}$$

z čoho pre $z_j := \dfrac{\partial y}{\partial x_j}$ dostaneme

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial y} - \operatorname{div}(\nabla_z f) = 0,}$$

teda $\dfrac{\partial f}{\partial y} - \displaystyle\sum_{j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial f}{\partial z_j}\right) = 0.$

Pre $k = 1$ sa táto rovnica nazýva Ostrogradského DR:

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial f}{\partial z_1}\right) - \frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{\partial f}{\partial z_2}\right) = 0}$$

Príklad 6.3.30 (Minimálna plocha ohraničená krivkou)**.**

Chceme minimalizovať funkcionál $S(F) = \iint_D \sqrt{1 + \|\nabla F\|^2}\,\mathrm{d}\lambda$, pričom $C = \partial D$ a krivka je lokálne daná $x = x, y = y, z = G(x, y)$. Potom Ostrogradského rovnica má tvar

$$\left(1 + F_x^2\right) F_{yy} - 2F_x F_y F_{xy} + \left(1 + F_y^2\right) F_{xx} = 0,$$

čo predstavuje čitateľ v rovnici minimálnej strednej krivosti.

- Nech $D\boldsymbol{y}$ je Jacobiho matica vektorového zobrazenia $\boldsymbol{y}$. Uvažujme funkcionál

$$\Psi(y) = \int_\Omega f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, D\boldsymbol{y})\,\mathrm{d}\boldsymbol{x} \tag{6.3}$$

Ak označíme $z_{i,j} := \dfrac{\partial y_i}{\partial x_j}$, tak EL sústava rovníc vo vektorovom tvare je:

$$\boxed{\nabla_{\boldsymbol{y}} f - \mathrm{div}(D_z f) = \boldsymbol{0},}$$

kde divergencia matice je počítaná po riadkoch. Potom rovnice v skalárnom tvare sú:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial y_1} - \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial f}{\partial z_{1,j}}\right) &= 0_1 \\
\frac{\partial f}{\partial z_2} - \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial f}{\partial z_{2,j}}\right) &= 0_2 \\
\vdots \quad \vdots \quad & \vdots \\
\frac{\partial f}{\partial z_m} - \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial f}{\partial z_{m,j}}\right) &= 0_m.
\end{aligned}$$

- Uvažujme funkcionál (teraz $Dy = \nabla y$)

$$\Phi(y) = \int_\Omega f(\boldsymbol{x}, y, Dy, \dots, D^k y)\,\mathrm{d}\boldsymbol{x} \tag{6.4}$$

EL sústava rovníc je:

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial y} + \sum_{j=1}^{k} \sum_{\mu_1 \le \ldots \le \mu_j} (-1)^j \frac{\partial^j}{\partial x_{\mu_1} \ldots \partial x_{\mu_j}} \left(\frac{\partial f}{\partial z_{\mu_1 \ldots \mu_j}} \right) = 0}$$

kde $z_{\mu_1} := \frac{\partial y}{\partial x_{\mu_1}}$, $z_{\mu_1 \mu_2} := \dfrac{\partial^2 y}{\partial x_{\mu_1} \partial x_{\mu_2}}, \ldots$ a $\mu_1 \ldots \mu_j$ sú indexy, ktoré zahŕňajú počet premenných, to znamená od 1 do n.